Buffonova jehla

Jiří Zelenka

Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník

jirka-zelenka@centrum.cz

Abstrakt

Zaměřil jsem se na konstantu π. K určení hodnoty jsem použil matematický experiment nazývaný Buffonova jehla. Naměřil jsem hodnotu π = 3,15 ± 0,10. Standardně se uvádí π_{tab} = 3,14 [1].

1 Úvod

Pí, někdy nazývané Ludolfovo číslo, ne jedno z nejznámějších iracionálních čísel spolu s Eulerovým číslem nebo odmocniny ze dvou. Zároveň je matematickou konstantou využívanou v mnoha vědních oborech, jako je matematika, fyzika, statistika atd. Bez ní bychom nebyli schopni spočítat např. obvod kruhu nebo matematické kyvadlo.

Tento matematický experiment vymyslel Georges Louis Leclerc de Buffon v roce 1777 [2].

2 Teoretický rozbor

Hodnota pí π je dána pravděpodobností protnutí p linek od sebe vzdálených délkou t jehlicí o délce l ve vztahu:

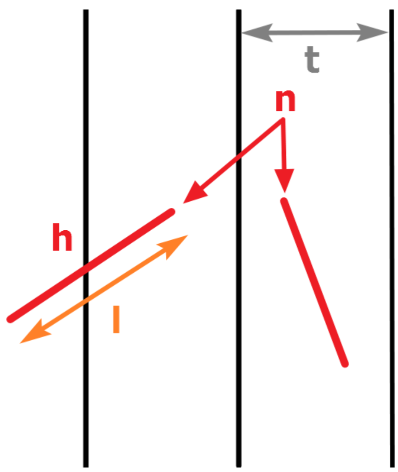
$$p = \frac{2l}{t\pi} \qquad (1)$$

Kde pravděpodobnost je dána podílem celkového počtu hodů n a počtem protnutí linek h:

$$p = \frac{h}{n} \qquad (2)$$

Hodnota pí je:

$$\pi = \frac{2ln}{th} \qquad (3)$$



Obr. 1 Jehly na poli s linkami

3 Popis experimentu

1. Narýsování rovnoběžných linek ve vzdálenosti 150 mm
2. Sbroušení špejlí na stejnou délku
3. Změření délky špejlí

4. Změření vzdálenosti
5. Provedení 600 hodů s 10 špejlemi

Použité přístroje a pomůcky:

10 špejlí, papír s nakreslenými linkami o velikosti 1x1,5m, posuvné měřítko, svinovací metr, personální počítač, program RStudio

4 Vypracování

Určení délky špejlí

U každé špejle jsem změřil délku posuvným měřítkem s přesností na 0,05 mm.

Číslo měření	[*l*] = mm
1	146,95
2	146,80
3	146,95
4	146,90
5	146,95
6	147,05
7	146,90
8	146,90
9	146,95
10	146,95
Aritmetická průměr	**146,93**
Nejistota měření na 95%	**0,06**

Tab. 1: Naměřená délka špejlí

Výpočet nejistoty:

$$u_l = \sqrt{(2u_{al})^2 + {u_{bl}}^2} \qquad (4)$$

$$u_{al} = \frac{1}{x(x-1)} \sum_{i=1}^{x} \left(l_i - \bar{l}\right)^2 \qquad (5)$$

U vzorce (4) jsem vynásobil u_{al} dvěma, abych dostal interval nejistoty, kde je 95% pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží v intervalu. Nepřesnost měřidla je u_{bl}.

U vztahu (5) x znamená celkový počet měření.

Určení mezer mezi linkami

Ke změření mezer mezi rovnoběžnými linkami jsem použil svinovací metr s přesností na 0,5 mm. Měřil jsem vždy vzdálenost mezi sousedními linkami na obou koncích papíru.

Číslo měření	[*t*] = mm
1	150,00
2	149,50
3	150,00
4	150,50
5	149,50
6	150,00
7	149,50
8	150,00
9	150,00
10	150,00
Aritmetická průměr	**149,90**
Nejistota měření na 95%	**0,54**

Tab. 2: Naměřená délka mezer mezi linkami

Výpočet nejistoty:

$$u_t = \sqrt{(2u_{at})^2 + {u_{bt}}^2} \qquad (6)$$

$$u_{at} = \frac{1}{x(x-1)} \sum_{i=1}^{x} \left(t_i - \bar{t}\right)^2 \qquad (7)$$

U vzorce (6) jsem vynásobil u_{at} dvěma, abych dostal interval nejistoty, kde je 95% pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží v intervalu. Nepřesnost měřidla je u_{bt}.

Hodnota pí

Hodnotu pí jsem spočítal ze vztahu (3) po 600 hodech. Během experimentu špejle protnuly 374krát jakoukoliv linku. Házel jsem vždy deset špejlí samostatně vodorovný vrhem ze vzdálenosti od 0,5 m až 1 m od středu papíru s linkami a z výšky 0,5 m až 0,6 m. Abych zajistil, že každá špejle dopadne jinak, házel jsem poslepu a měnil výšku a vzdálenost, ze které jsem házel.

Číslo série měření (po 10)	Počet protnutí	Číslo série měření (po 10)	Počet protnutí
1	6	31	6
2	6	32	5
3	8	33	6
4	7	34	7
5	3	35	7
6	7	36	6
7	8	37	6
8	4	38	7
9	6	39	7
10	4	40	5
11	7	41	7
12	6	42	5
13	4	43	7
14	8	44	5
15	6	45	6
16	7	46	7
17	6	47	6
18	6	48	5
19	8	49	5
20	8	50	7
21	5	51	9
22	6	52	7
23	7	53	4
24	7	54	7
25	5	55	6
26	7	56	5
27	5	57	7
28	8	58	8
29	7	59	6
30	6	60	5
Celkem			**374**

Tab. 3: Počet protnutí linky špejlí v každé sérii po deseti hodech

π **= 3,1450**

Výpočet nejistoty pí

U tohoto experimentu závisí na náhodnosti dopadu jehly, což bude hlavní zdroj nejistoty, kterou si můžeme vyjádřit ze vztahu:

$$u_\pi = \sqrt{\left(\frac{\partial\pi}{\partial p}u_p\right)^2 + \left(\frac{\partial\pi}{\partial l}u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial\pi}{\partial t}u_t\right)^2} \tag{8}$$

Vztah pro pí:

$$\pi = \frac{2l}{tp} \tag{9}$$

Mezi výpočty ke vztahu (8):

$$\frac{\partial\pi}{\partial p} = \frac{2l}{t}\frac{d}{dp}p^{-1} = -\frac{2l}{tp^2} = -\frac{\pi}{p} \tag{10a}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial l} = \frac{2}{tp}\frac{d}{dl}l = \frac{2}{tp} \tag{10b}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} = \frac{2l}{p}\frac{d}{dt}t^{-1} = -\frac{2l}{pt^2} \tag{10c}$$

Nejistota pravděpodobnosti je:

$$u_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{11}$$

Zjednodušený zápis nejistoty pí:

$$u_\pi = \sqrt{\frac{\pi^2}{p^2}{u_p}^2 + \frac{4}{t^2p^2}{u_l}^2 + \frac{4l^2}{p^2t^4}{u_t}^2} \tag{12}$$

π = 3,1450* | u_p = 0,0198

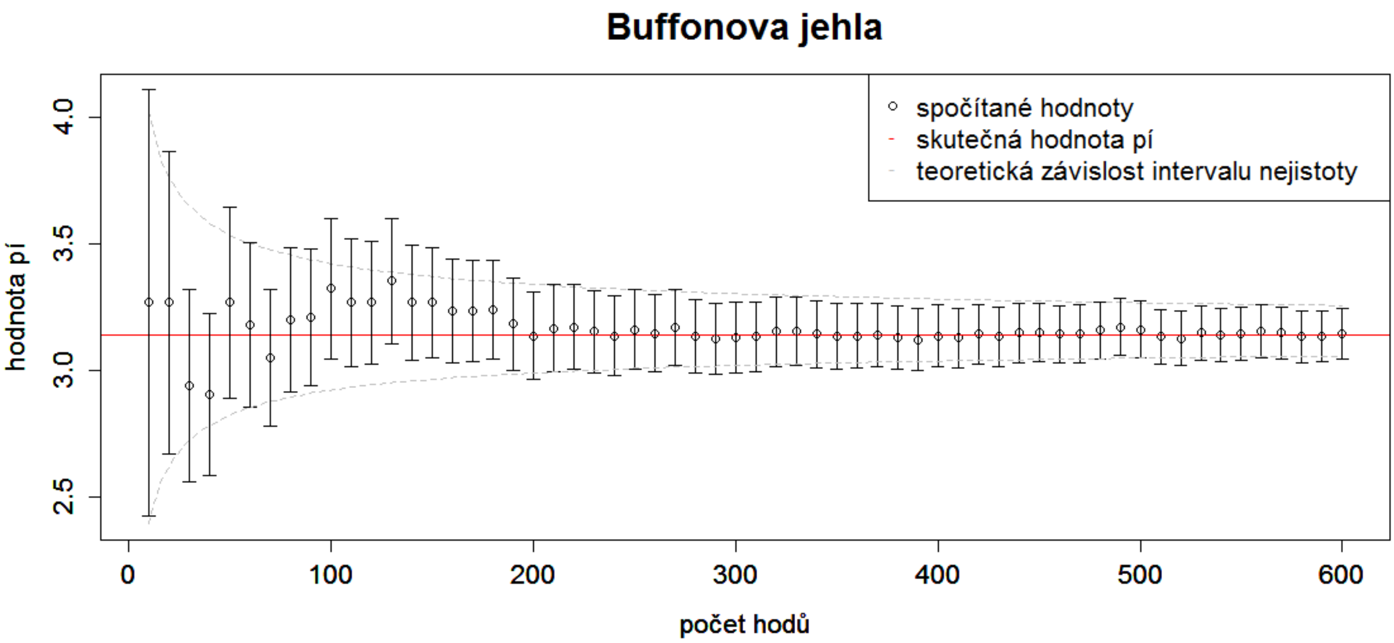
p = 0,6233 | u_l = 0,06 mm

l = 146,93 mm | u_t = 0,54 mm

t = 149,90 mm | **u_π = 0,1006**

* Hodnota pí je dána ze vztahu (3).

Grafické znázornění vývoje naměřené hodnoty pí v průběhu měření



Obr. 2: Graf hodnoty pí v závislosti na počtu hodů

V obrázku (2) můžeme vidět graf hodnoty pí v závislosti na počtu hodů. Červenou přímkou označena skutečnou hodnotu pí π=*3,1416* a černými kolečky hodnoty naměřené v průběhu měření. Z černých koleček vybíhají chybové úsečky znázorňující interval nejistoty. Body s hodnotami jsou vždy po deseti hodech. Dále v grafu najdeme teoretickou závislost rozpětí intervalu nejistoty. Tvoří ji proložená funkce, která byla vypočítaná nelineální regresí. Proložená funkce pro horní hranici intervalu je *y = π + 1/(a * x^b),* kde *a* = 0,35 ± 0,04 a *b* = 0,51 ± 0,02. Pro dolní hranici vychází opačná funkce *y = π - 1/(a * x^b)*, kde *a* = 0,41 ± 0,03 a *b = 0,52 ± 0,02.* V chí kvadrátu vychází hodnota 0,001, díky které je jasné, že probíhající funkce představuje téměř přesnou předpověď, jak se bude interval nejistoty zmenšovat.

5 Diskuze

Ze změřených dat jsem pomocí vztahu (3) spočítal hodnotu pí π = 3,15 ± 0,10. Když ji porovnám s tabulkovou hodnotou π_{tab} = 3,14 [1], tak zjistím, že jsem se dopustil chyby 0,003. Tato chyba je pravděpodobně způsobena, že žádný hod není náhodný. Házel jsem vždy deset špejlí samostatně. Takže se mohly navzájem ovlivnit při dopadu. Výhoda tohoto experimentu byla, že jsem nepotřeboval přesné měřicí přístroje, takže konečný výsledek nemohl být výrazně ovlivněn chybou přístroje.

Při měření jsem používal papír, na kterém byly narýsované linky ve vzdálenosti *t* = (0,1499 ± 0,0005) m, což je zanedbatelná odchylka vůči nejistotě pravděpodobnosti.

K házení jsem používal špejle o dálce *l* = (0,14693 ± 0,00006) m, což je opět zanedbatelná odchylka vůči nejistotě pravděpodobnosti.

6 Závěr

Pomocí Buffonovy jehly jsem změřil hodnotu pí jako $\pi = 3{,}15 \pm 0{,}10$.

7 Literatura

[1] Mikulčák J. a kolektiv: Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro střední školy. 1. vyd. Prometheus, Praha 2003. ISBN: 978-80-7196-264-9.

[2] Weisstein, Eric W.: *Buffon's Needle Problem [online]*. MathWorld--A Wolfram Web Resource. Dostupné z WWW http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html